彭小帮24高数每日一练14-5
（简单的微分方程求解）

2024 年 12 月 13 日

【题目 1】 求微分方程 $y'=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$ 的通解。

解析

【解法 1】方程为齐次方程令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y=ux,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，代人原方程，化为 $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}$，再化为 $u\,\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}$，两边积分 $\int u\,\mathrm{d}u=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$，解得 $\frac{u^2}{2}=\ln|x|+\ln|C|=\ln|Cx|$，故原方程的通解为 $\frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2}=\ln|Cx|$，其中 C 为任意常数。

【解法 2】原方程化简为 $yy'-\frac{1}{x}y^2=x$，即 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}y^2\right)-\frac{2}{x}\left(\frac{1}{2}y^2\right)=x$，令 $z=\frac{1}{2}y^2$，上式化为 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{2}{x}z=x$，由公式得通解为

$$z=\mathrm{e}^{-\int\left(-\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x}\left[\int x\mathrm{e}^{\int\left(-\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=x^2(\ln|x|+C),$$

故原方程的通解为 $\frac{1}{2}y^2=x^2\cdot(\ln|x|+C)$，其中 C 为任意常数。

【解法 3】原方程化简为 $y'-\frac{1}{x}y=xy^{-1}$，此为 Bernoulli 方程，其中 $n=-1$.
令 $z=y^{1-n}=y^{1-(-1)}=y^2$，代入上述方程，化简得 $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}z=x$，即 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{2}{x}z=2x$，由公式得通解为 $z=\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left[\int 2x\mathrm{e}^{\int\left(-\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=x^2(2\ln|x|+C)$，故原方程的通解为 $y^2=x^2(2\ln|x|+C)$，其中 C 为任意常数。

特别提示：容易看出原方程既是齐次方程，也是 Bernoulli 方程类型，可用对应的方法求解，如解法 1 和解法 3；解法 2 将原方程化简后，通过变量代换进一步化为一阶非齐次线性微分方程求解，需要对求导公式很熟悉且要有一定的观察能力.

□

【题目 2】 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{3x+2y}$ 的通解.

解析

【解法 1】令 $u=3x+2y$，则 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=3+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，代人原方程，得 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=3+\frac{2}{u}$，两边积分，得 $\frac{1}{3}u-\frac{2}{9}\ln(3u+2)=x+C$. 故原方程的通解为

$$\frac{3x+2y}{3}-\frac{2}{9}\ln(9x+6y+2)=x+C.$$

【解法 2】交换 x 与 y 的位置为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=3x+2y$，化为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-3x=2y$。于是原方程的通解为

$$x=\mathrm{e}^{\int 3\,\mathrm{d}y}\left[\int 2y\mathrm{e}^{-\int 3\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y+C\right]=\mathrm{e}^{3y}\left[-\frac{2}{3}\left(y\mathrm{e}^{-3y}+\frac{\mathrm{e}^{-3y}}{3}\right)+C\right]=-\frac{2}{3}y-\frac{2}{9}+C.$$

特别提示：有些一阶微分方程，无法直接求解，但可通过作变量代换化为可求解形式，或交换 x 与 y 的位置，以 x 为未知量，y 为自变量化为可求解形式求得。 □